ΘΕΩΡΙΑ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- Τι είναι κλάσμα;

Απ.

Κλάσμα είναι ένα μέρος μιας ποσότητας.

Κλάσμα είναι ένας λόγος δύο αριθμών(fraction is a ratio of two whole numbers)

- Πως εκφράζετε συμβολικά ένα κλάσμα;

Απ.

Εκφράζετε με μία οριζόντια γραμμή όπου πάνω και κάτω απ' αυτήν βρίσκονται κάποιοι αριθμοί οι οποίοι λέγονται όροι του κλάσματος. Ακολουθεί ο μαθηματικός συμβολισμός του κλάσματος στον οποίο τα α και β παριστάνουν αριθμούς.

Συμβολισμός κλάσματος: $\frac{\alpha}{\beta}$ Στο κλάσμα αυτό τα α και β λέγονται όροι του κλάσματος και ειδικότερα το α λέγεται αριθμητής και το β λέγεται παρονομαστής.

Για παράδειγμα: Στο κλάσμα $\frac{5}{6}$ οι όροι του κλάσματος είναι το 5 και το 6.Ειδικότερα το 5 είναι ο αριθμητής και το 6 είναι ο παρονομαστής

Αγγλική ορολογία:Στα αγγλικά το κλάσμα λέγεται fraction, ο αριθμητής λέγεται numerator και ο παρονομαστής λέγεται denominator.

- Τι σημαίνει το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$

  Απ.
  Σημαίνει «α από τα β» ή «α στα β» ή πιο αναλυτικά «α κομμάτια από τα β ίσα κομμάτια στα οποία διαιρέσαμε(χωρίσαμε) μια ποσότητα (μια ακέραια μονάδα)».

  Για παράδειγμα το κλάσμα $\frac{4}{7}$ σημαίνει «4 από τα 7» ή διαφορετικά «4 στα 7» ή πιο αναλυτικά σημαίνει σημαίνει ότι διαιρέσαμε ένα μέγεθος σε 7 ίσα μέρη και πήραμε τα 4 απ' αυτά.
- Πως διαβάζεται ένα κλάσμα;
  Απ.

  Το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ διαβάζεται ή «κάπα προς ν» ή «κάπα νιοστά»

  Για παράδειγμα: Το κλάσμα $\frac{4}{5}$ διαβάζεται ή «τέσσερα προς πέντε» ή «τέσσερα πέμπτα»
- Τι δηλώνει ο παρονομαστής και ο αριθμητής ενός κλάσματος.
  Απ.
  Ο παρονομαστής δηλώνει σε πόσα μέρη χωρίσαμε ένα μέγεθος(μια ποσότητα) και ο αριθμητής

δηλώνει πόσα μέρη πήραμε από αυτά.
Παρονομαστής: σε πόσα ίσα μέρη χωρίζουμε ένα μέγεθος.
Αριθμητής: πόσα κομμάτια παίρνουμε.

Για παράδειγμα: Στο κλάσμα $\frac{2}{3}$ το 3 που είναι ο παρονομαστής μας δηλώνει ότι χωρίσαμε ένα μέγεθος σε 3 ίσα μέρη και το 2 που είναι ο αριθμητής δηλώνει ότι πήραμε δύο απ' αυτά.

- <u>Ο παρονομαστής ενός κλάσματος δεν μπορεί να είναι ίσος με το 0.</u>
  <u>Δεν υπάρχει κλάσμα με παρονομαστή το 0.</u>

- Τι ονομάζουμε κλασματική μονάδα;
  Απ.
  Κάθε κλάσμα με αριθμητή τη μονάδα.

  Για παράδειγμα: Το $\frac{1}{5}$ είναι μία κλασματική μονάδα αφού ο αριθμητής του κλάσματος είναι το 1.
- Τι δηλώνει μία κλασματική μονάδα;
  Απ.
  Δηλώνει ότι πήραμε 1 μόνο μέρος από τα ίσα μέρη στα οποία διαιρέσαμε ένα μέγεθος.

  Για παράδειγμα: Το $\frac{1}{5}$ δηλώνει ότι έχουμε μόνο ένα μέρος από τα 5 στα οποία διαιρέσαμε ένα μέγεθος.

- Τι δηλώνει το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ με βάση την κλασματική μονάδα.

  Απ.

  Δηλώνει ότι έχουμε κ κλασματικές μονάδες ίσες με $\frac{1}{\nu}$. Δηλαδή $\boxed{\frac{\kappa}{\nu} = \kappa \cdot \frac{1}{\nu}}$

- Κάθε κλάσμα εκφράζει μια διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή.

  Έτσι το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ εκφράζει τη διαίρεση κ:ν δηλαδή $\boxed{\frac{\kappa}{\nu} = \kappa : \nu}$

  Για παράδειγμα το κλάσμα $\frac{3}{5}$ εκφράζει τη διαίρεση 3:5.

- Αντίστροφα και κάθε διαίρεση εκφράζει ένα κλάσμα όπου αριθμητής είναι ο Διαιρετέος και παρονομαστής ο διαιρέτης.

  Έτσι η διαίρεση α:β εκφράζει το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$. $\boxed{\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}}$

  Για παράδειγμα η διαίρεση 8:4 εκφράζει το κλάσμα $\frac{8}{4}$.

- Σε ποιες βασικές κατηγορίες χωρίζονται τα κλάσματα;
  Απ.
  Χωρίζονται στα γνήσια, στα ίσα με τη μονάδα και στα καταχρηστικά
- Ποια κλάσματα λέγονται γνήσια;
  Απ.
  Γνήσια κλάσματα λέγονται αυτά που ο αριθμητής τους είναι μικρότερος από τον παρονομαστή τους.
  <u>Προσοχή: Τα γνήσια κλάσματα είναι μικρότερα από τη μονάδα.</u>

  Για παράδειγμα: Τα $\frac{1}{4}, \frac{3}{7}$ είναι γνήσια κλάσματα μικρότερα της μονάδας.
- Ποια κλάσματα λέγονται ίσα με τη μονάδα;
  Απ.
  Ίσα με τη μονάδα λέγονται τα κλάσματα που ο αριθμητής τους είναι ίσος με τον παρονομαστή τους.

  Για παράδειγμα: Τα $\frac{4}{4}, \frac{20}{20}$ είναι ίσα με τη μονάδα
- Ποια κλάσματα λέγονται καταχρηστικά;
  Απ.
  Καταχρηστικά κλάσματα λέγονται αυτά που ο αριθμητής τους είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τους.
  <u>Προσοχή: Τα καταχρηστικά κλάσματα είναι μεγαλύτερα της μονάδας.</u>

  Για παράδειγμα: Τα $\frac{15}{8}, \frac{11}{9}$ είναι καταχρηστικά κλάσματα και είναι μεγαλύτερα της μονάδας
- Κάθε φυσικός αριθμός γράφεται σαν κλάσμα με παρονομαστή τη μονάδα.

  Δηλαδή ο αριθμός α γράφεται $\frac{\alpha}{1}$. Ισχύει επομένως $\boxed{\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}}$

  Για παράδειγμα το 5 γράφεται σαν κλάσμα με τη μορφή $\frac{5}{1}$
- Ένα κλάσμα που έχει στον αριθμητή του το 0 είναι ίσο με το 0

  Δηλαδή $\frac{0}{\alpha} = 0$ όπου α αριθμός διάφορος του 0

  Για παράδειγμα $\frac{0}{5} = 0$
- Ποια κλάσματα λέγονται ομώνυμα;
  Απ.
  Ομώνυμα λέγονται τα κλάσματα που έχουν ίσους παρονομαστές.

  Για παράδειγμα τα κλάσματα $\frac{6}{11}$ και $\frac{15}{11}$ είναι ομώνυμα αφού και τα δύο έχουν παρονομαστή το 11.
- Ποια κλάσματα λέγονται ετερώνυμα;

Απ.

Ετερώνυμα λέγονται τα κλάσματα που έχουν διαφορετικούς παρονομαστές.

Για παράδειγμα τα κλάσματα $\frac{2}{5}$ και $\frac{3}{4}$ είναι ετερώνυμα αφού έχουν διαφορετικούς παρονομαστές.

- Πότε δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα ή ίσα;

  Απ.

  Δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος μιας ποσότητας.

- Πότε δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ισοδύναμα ή ίσα ;

  Απ.

  Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν ισχύει αδ=βγ.

  Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν ισχύει γ:α=δ:β.

  Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν ισχύει α:γ=β:δ.

- Αν ισχύει αδ=βγ τότε μπορούμε να γράψουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ή $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ ή $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ ή $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$

- Πως δημιουργούμε ισοδύναμα κλάσματα;

  Απ.

  1ος τρόπος. Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος με τον ίδιο αριθμό. Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\lambda}{\beta\cdot\lambda}$

  Για παράδειγμα: $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{12}{20}$

  2ος τρόπος. Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος με ένα κοινό διαιρέτη τους διάφορο του 1. Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha:\lambda}{\beta:\lambda}$

  Για παράδειγμα: $\frac{15}{24}=\frac{15:3}{24:3}=\frac{5}{8}$

- Τι ονομάζουμε απλοποίηση ενός κλάσματος;

  Απ.

  Απλοποίηση ενός κλάσματος λέγεται η διαδικασία κατά την οποία διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με ένα κοινό διαιρέτη τους(διάφορο της μονάδας) έτσι ώστε να προκύψει ένα κλάσμα ισοδύναμο με μικρότερους όρους.

- Πότε ένα κλάσμα λέγεται ανάγωγο;

  Απ.

Ένα κλάσμα λέγεται ανάγωγο όταν δεν μπορεί να απλοποιηθεί.
Ένα κλάσμα λέγεται ανάγωγο όταν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των όρων του είναι το 1.
Ένα κλάσμα λέγεται ανάγωγο όταν οι όροι του είναι πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί.

- Πως συγκρίνουμε κλάσματα

1η περίπτωση: Μεταξύ κλασμάτων που έχουν τον ίδιο παρονομαστή μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μεγαλύτερο αριθμητή.

Για παράδειγμα: Μεταξύ του $\frac{2}{7}$ και του $\frac{5}{7}$ μεγαλύτερο είναι το $\frac{5}{7}$ γιατί έχει το μεγαλύτερο αριθμητή.

2η περίπτωση: Μεταξύ κλασμάτων που έχουν τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή.

Για παράδειγμα: Μεταξύ του $\frac{5}{8}$ και του $\frac{5}{14}$ μεγαλύτερο είναι το $\frac{5}{8}$ γιατί έχει το μικρότερο παρονομαστή.

3η περίπτωση: Μεταξύ γνήσιου και καταχρηστικού κλάσματος μεγαλύτερο είναι το καταχρηστικό γιατί το γνήσιο είναι μικρότερο της μονάδας και το καταχρηστικό είναι μεγαλύτερο της μονάδας.

Για παράδειγμα: Μεταξύ του $\frac{4}{7}$ και του $\frac{13}{12}$ μεγαλύτερο είναι το $\frac{13}{12}$ γιατί αυτό είναι καταχρηστικό και το $\frac{4}{7}$ είναι γνήσιο.

4η περίπτωση: Για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα τα κάνουμε ομώνυμα και μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μεγαλύτερο αριθμητή.

Για παράδειγμα: Για να συγκρίνουμε τα κλάσματα $\frac{5}{7}$ και $\frac{7}{9}$ τα οποία δεν έχουν ίδιους παρονομαστές ούτε ίδιους αριθμητές και είναι και τα δύο γνήσια οπότε δεν υπάγονται στην 3η περίπτωση τα κάνουμε ομώνυμα

Το ΕΚΠ αυτών είναι το 63 οπότε θα έχουμε

$$\begin{array}{cc} \overset{9}{\cup} & \overset{7}{\cup} \\ \frac{5}{7} & \frac{7}{9} \\ \frac{45}{63} & \frac{49}{63} \end{array}$$

Επειδή το $\frac{49}{63}$ είναι το μεγαλύτερο κλάσμα μεγαλύτερο από τα κλάσματα $\frac{5}{7}$ και του $\frac{7}{9}$ θα είναι το $\frac{7}{9}$.

Ένας γενικός και γρήγορος τρόπος για να συγκρίνω δύο κλάσματα είναι να πολλαπλασιάσω τους όρους τους χιαστί και στο μεγαλύτερο γινόμενο(αποτέλεσμα) αντιστοιχεί το μεγαλύτερο κλάσμα.

Για να συγκρίνω τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ αρκεί να πολλαπλασιάσω το α με το δ και στη συνέχεια το γ με το β. Αν το αδ είναι μεγαλύτερο από το γβ τότε μεγαλύτερο κλάσμα είναι το $\frac{\alpha}{\beta}$ ενώ αν το γβ είναι μεγαλύτερο από το αδ τότε μεγαλύτερο είναι το δεύτερο κλάσμα δηλαδή το $\frac{\gamma}{\delta}$

Για παράδειγμα. Για να συγκρίνουμε τα κλάσματα $\frac{5}{8}$ και $\frac{7}{9}$ πολλαπλασιάζουμε το 5 με το 9 και το 7 με το 8.

$5\cdot 9=45$ και $7\cdot 8=56$.

Επειδή το πρώτο γινόμενο είναι μεγαλύτερο από το δεύτερο γινόμενο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα $\frac{5}{8}$

- Ισχύει γενικά

$$\alpha\cdot\delta<\beta\cdot\gamma\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\gamma}{\delta}$$

$$\alpha\cdot\delta<\beta\cdot\gamma\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\gamma}<\frac{\beta}{\delta}$$

$$\alpha\cdot\delta<\beta\cdot\gamma\Leftrightarrow\frac{\delta}{\gamma}<\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\alpha\cdot\delta<\beta\cdot\gamma\Leftrightarrow\frac{\delta}{\beta}<\frac{\gamma}{\alpha}$$

Όπου α, β, γ και δ φυσικοί αριθμοί διάφοροι του 0

- Πως προσθέτουμε κλάσματα

  1η περίπτωση: Αν είναι ομώνυμα προσθέτουμε τους αριθμητές και γράφουμε τον ίδιο παρονομαστή.

  Διαφορετικά το άθροισμα ομώνυμων κλασμάτων είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή τον παρονομαστή των κλασμάτων

  Συμβολικά τα παραπάνω διατυπώνονται ως εξής:

  $$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$$

  Για παράδειγμα

  $$\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{3+5}{7}=\frac{8}{7}$$

  2η περίπτωση: Αν είναι ετερώνυμα τα κάνουμε ομώνυμα και τα προσθέτουμε όπως στην πρώτη περίπτωση.

  Συμβολικά τα παραπάνω διατυπώνονται ως εξής:

$\overset{\delta}{\cup}\quad\overset{\beta}{\cup}$

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}+\frac{\gamma\beta}{\beta\delta}=\frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta}$ ή πιο απλά $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta}$

Για παράδειγμα

$\overset{3}{\cup}\quad\overset{5}{\cup}$

$\frac{2}{5}+\frac{4}{3}=\frac{2\cdot3}{5\cdot3}+\frac{4\cdot5}{5\cdot3}=\frac{6}{15}+\frac{20}{15}=\frac{6+20}{15}=\frac{26}{15}$

- Πως αφαιρούμε κλάσματα

  1η περίπτωση: Αν είναι ομώνυμα αφαιρούμε τους αριθμητές και γράφουμε τον ίδιο παρονομαστή.

  Διαφορετικά η διαφορά ομώνυμων κλασμάτων είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή τη διαφορά των αριθμητών και παρονομαστή τον παρονομαστή των κλασμάτων

  Συμβολικά τα παραπάνω διατυπώνονται ως εξής:

  $\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$

  Για παράδειγμα $\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\frac{7-3}{10}=\frac{4}{10}$

  2η περίπτωση: Αν είναι ετερώνυμα τα κάνουμε ομώνυμα και τα αφαιρούμε όπως στην πρώτη περίπτωση.

  Συμβολικά τα παραπάνω διατυπώνονται ως εξής:

  $\overset{\delta}{\cup}\quad\overset{\beta}{\cup}$

  $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}-\frac{\gamma\beta}{\beta\delta}=\frac{\alpha\delta-\gamma\beta}{\beta\delta}$ ή πιο απλά $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta-\gamma\beta}{\beta\delta}$

  $\overset{5}{\cup}\quad\overset{6}{\cup}$

  Για παράδειγμα $\frac{5}{6}-\frac{2}{5}=\frac{5\cdot5}{6\cdot5}+\frac{2\cdot6}{6\cdot5}=\frac{25}{30}-\frac{12}{30}=\frac{25-12}{30}=\frac{13}{30}$

- Οι ιδιότητες που ισχύουν στην πρόσθεση και στην αφαίρεση φυσικών αριθμών ισχύουν και στην περίπτωση των κλασμάτων
  - Αντιμεταθετική ιδιότητα : $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\alpha}{\beta}$
  - Προσεταιριστική ιδιότητα: $\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)=\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}\right)+\frac{\varepsilon}{\zeta}$
  - Ουδέτερο στοιχείο το 0: $\frac{\alpha}{\beta}+0=0+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$
- Τι ονομάζουμε μικτό αριθμό;

  Απ.

  Ονομάζουμε το άθροισμα ενός φυσικού αριθμού με ένα γνήσιο κλάσμα

  Ισχύει $\kappa\frac{\alpha}{\beta}=\kappa+\frac{\alpha}{\beta}$ όπου $\alpha<\beta$

Για παράδειγμα ο μικτός $5\frac{3}{4}$ είναι στην ουσία το άθροισμα $5+\frac{3}{4}$

- Πως μετατρέπουμε ένα μικτό σε κλάσμα;
  Απ.
  Για να μετατρέψουμε ένα μικτό σε κλάσμα πολλαπλασιάζουμε το φυσικό αριθμό με τον παρονομαστή του κλάσματος και στη συνέχεια προσθέτουμε στο γινόμενο τον αριθμητή του κλάσματος και το συνολικό αποτέλεσμα το βάζουμε αριθμητή στο καινούριο κλάσμα. Ο παρονομαστής του κλάσματος που προκύπτει από τη μετατροπή είναι ίδιος με τον παρονομαστή του αρχικού κλάσματος.

  Συμβολικά τα παραπάνω παριστάνονται ως εξής: $\kappa\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\kappa\beta+\alpha}{\beta}$

  Για παράδειγμα $3\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5+2}{5}=\frac{15+2}{5}=\frac{17}{5}$

  Διαφορετικά για να μετατρέψουμε ένα μικτό σε κλάσμα ακολουθούμε την εξής διαδικασία

  $$\kappa\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\kappa}{1}+\frac{\alpha}{\beta}=\overset{\beta}{\underset{\cup}{\frac{\kappa}{1}}}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\kappa\beta}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\kappa\beta+\alpha}{\beta}$$

- Κάθε μικτός μετατρέπεται σε ένα καταχρηστικό κλάσμα.
- Κάθε καταχρηστικό κλάσμα μπορεί να μετατραπεί σε μικτό

  Η διαδικασία είναι απλή. Έστω το κλάσμα $\frac{\nu}{\mu}$

  Διαιρούμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή και ο μικτός σχηματίζεται ως εξής:

ν	μ
	π
υ	

  μικτός $=\pi\frac{\upsilon}{\mu}$ όπου π είναι το πηλίκο της διαίρεσης, υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης και μ είναι ο διαιρέτης της διαίρεσης που είναι και ο παρονομαστής του αρχικού κλάσματος.

  Για παράδειγμα για να μετατρέψουμε το καταχρηστικό κλάσμα $\frac{25}{8}$ ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

25	8
	3
1	

  Άρα ο μικτός που προκύπτει θα είναι ο εξής $3\frac{1}{8}$

- Ακολουθούν βασικοί τύποι που αφορούν τη διάσπαση κλάσματος.

  i. $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}$ ii. $\frac{\alpha-\beta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}$

iii. $\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}$ iv. $\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta}=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}$

v. $\frac{\alpha\beta+\gamma}{\alpha}=\beta+\frac{\gamma}{\alpha}$ vi. $\frac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha}=\beta-\frac{\gamma}{\alpha}$

vii. $\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}=1+\frac{\gamma}{\alpha}$ viii. $\frac{\alpha-\gamma}{\alpha}=1-\frac{\gamma}{\alpha}$

- Πως πολλαπλασιάζουμε κλάσματα;
  Απ.
  Για να πολλαπλασιάσουμε κλάσματα πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές και το αποτέλεσμα(γινόμενο) το βάζουμε αριθμητή στο τελικό κλάσμα και πολλαπλασιάζουμε και τους παρονομαστές και το αποτέλεσμα(γινόμενο) το βάζουμε παρονομαστή στο τελικό κλάσμα.
  Ο πολλαπλασιασμός δύο κλασμάτων συμβολικά διατυπώνεται ως εξής:
  $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$
  Για παράδειγμα $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3\cdot4}{5\cdot7}=\frac{12}{35}$
- Τι ονομάζουμε γινόμενο κλασμάτων;
  Απ.
  Ονομάζουμε ένα καινούριο κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

- Πως πολλαπλασιάζουμε ένα φυσικό αριθμό με ένα κλάσμα;
  Απ.
  Για να πολλαπλασιάσουμε ένα φυσικό αριθμό με ένα κλάσμα πολλαπλασιάζουμε το φυσικό αριθμό με τον αριθμητή του κλάσματος και το αποτέλεσμα(γινόμενο) το βάζουμε αριθμητή στο τελικό κλάσμα και παρονομαστή στο τελικό κλάσμα βάζουμε τον παρονομαστή του αρχικού κλάσματος.
  Διαφορετικά το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με ένα κλάσμα είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο του φυσικού αριθμού με τον αριθμητή του κλάσματος και παρονομαστή τον παρονομαστή του κλάσματος.
  $\alpha\cdot\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}$ ή $\frac{\beta}{\gamma}\cdot\alpha=\frac{\beta\cdot\alpha}{\gamma}$
  Για παράδειγμα $5\cdot\frac{8}{7}=\frac{5\cdot8}{7}=\frac{40}{7}$
  Επίσης $\frac{3}{4}\cdot7=\frac{3\cdot7}{4}=\frac{21}{4}$

- Πότε δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι;
  Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι όταν το γινόμενό τους είναι ίσο με το 1.
  - Ο μόνος αριθμός που δεν έχει αντίστροφο είναι το 0 γιατί με όποιο αριθμό και να πολλαπλασιάσω το 0 μου κάνει 0.Άρα δεν υπάρχει περίπτωση να βρω αριθμό να τον πολλαπλασιάζω με το 0 και να μου δίνει αποτέλεσμα ίσο με 1.

- Το 1 έχει αντίστροφο το 1 για τι $1\cdot 1=1$
- Ο αντίστροφος του α (με $\alpha\neq 0$) είναι ο $\frac{1}{\alpha}$ γιατί $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha}=1$

  Για παράδειγμα ο αντίστροφος του 5 είναι το $\frac{1}{5}$
- Ο αντίστροφος του $\frac{1}{\alpha}$ (με $\alpha\neq 0$) είναι ο α

  Για παράδειγμα ο αντίστροφος του $\frac{1}{10}$ είναι το 10
- Ο αντίστροφος του $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι το κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$ γιατί $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\alpha}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\beta}=1$

  Για παράδειγμα ο αντίστροφος του $\frac{3}{5}$ είναι το $\frac{5}{3}$.

- Ποιος είναι ο μόνος φυσικός αριθμός που ισούται με τον αντίστροφό του;
  Απ.
  Το 1
- Ποιος είναι ο αριθμός που δεν έχει αντίστροφο;
  Απ.
  Το 0
- Οι ιδιότητες που ισχύουν για τον πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών ισχύουν και στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

  - Αντιμεταθετική ιδιότητα : $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$
  - Προσεταιριστική ιδιότητα: $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)=\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}$
  - Ουδέτερο στοιχείο το 1: $\frac{\alpha}{\beta}\cdot 1=1\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$
  - Πολλαπλασιασμός με το 0: $\frac{\alpha}{\beta}\cdot 0=0\cdot\frac{\alpha}{\beta}=0$
  - Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.
    $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}$
- Τι ισχύει για τη δύναμη ενός κλάσματος;
  Απ.
  Ο ορισμός της δύναμης ενός κλάσματος είναι ίδιος με τον αντίστοιχο ορισμό για τη δύναμη φυσικού αριθμού. Δηλαδή

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}=\underbrace{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{\alpha}{\beta}}_{\nu\ \textbf{παράγοντες}}=\frac{\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}^{\nu\ \textbf{παράγοντες}}}{\underbrace{\beta\cdot\beta\cdot\beta\cdot\ldots\cdot\beta}_{\nu\ \textbf{παράγοντες}}}=\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$$

Δηλαδή τελικά ισχύει για τη δύναμη ενός κλάσματος

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}=\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$$

- Τι ισχύει όσον αφορά την προτεραιότητα των πράξεων στα κλάσματα;
  Απ.
  Ότι ισχύει και στους φυσικούς αριθμούς. Δηλαδή η σειρά με την οποία γίνονται οι πράξεις είναι η εξής:
  Πρώτα γίνονται οι δυνάμεις
  Μετά γίνονται οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις
  Τέλος γίνονται οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά.
  Αν υπάρχουν στην παράσταση παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.
- Πως διαιρούμε δύο κλάσματα;
  Απ.
  Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα και κάνουμε πολλαπλασιασμό.
  Διαφορετικά
  Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα πολλαπλασιάζουμε το πρώτο κλάσμα με τον αντίστροφο του δευτέρου κλάσματος
  Τα παραπάνω συμβολικά διατυπώνονται ως εξής:
  $$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$
  Για παράδειγμα
  $$\frac{3}{5}:\frac{7}{2}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot2}{5\cdot7}=\frac{6}{35}$$
- Διαίρεση φυσικού αριθμού με κλάσμα.
  $$\alpha:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{1\cdot\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\gamma}$$
  Για παράδειγμα
  $$5:\frac{2}{3}=\frac{5}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5\cdot3}{1\cdot2}=\frac{15}{2}$$
  $$\frac{\gamma}{\delta}:\alpha=\frac{\gamma}{\delta}:\frac{\alpha}{1}=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\gamma\cdot1}{\delta\cdot\alpha}=\frac{\gamma}{\delta\cdot\alpha}$$
  Για παράδειγμα
  $$\frac{4}{5}:3=\frac{4}{5}:\frac{3}{1}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4\cdot1}{5\cdot3}=\frac{4}{15}$$
- Τι ονομάζουμε σύνθετο κλάσμα;
  Απ.

Ένα κλάσμα όπου οι όροι του είναι κλάσματα.
Στην ουσία ένα κλάσμα εκφράζει μια διαίρεση δύο κλασμάτων.Ακολουθεί ο συμβολισμός ενός σύνθετου κλάσματος το οποίο έχει αριθμητή το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ και παρονομαστή το κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$$

Σ' αυτό το σύνθετο κλάσμα τα α και δ λέγονται άκροι όροι και τα β και γ λέγονται μέσοι όροι.

- Πως μετατρέπουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό.
  Απ.
  Για να μετατρέψουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό πολλαπλασιάζουμε τους άκρους όρους και αυτό που βρίσκουμε το βάζουμε αριθμητή στο καινούριο κλάσμα και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τους μέσους όρους και αυτό που βρίσκουμε το βάζουμε παρονομαστή στο καινούριο κλάσμα.
  Συμβολικά τα παραπάνω διατυπώνονται ως εξής:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$

Για παράδειγμα

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{7}} = \frac{5\cdot 7}{2\cdot 3} = \frac{35}{6}$$

- Τι γίνεται στην περίπτωση που σε ένα σύνθετο κλάσμα ο ένας όρος του είναι φυσικός αριθμός;
  Απ.
  Κάνουμε το φυσικό αριθμό κλάσμα βάζοντας από κάτω απ' αυτόν τη μονάδα και μετατρέπουμε το σύνθετο κλάσμα σε απλό κατά τη γνωστή διαδικασία.
  Συμβολικά τα παραπάνω διατυπώνονται ως εξής:

  ➢ $$\frac{\alpha}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\frac{\alpha}{1}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\cdot\delta}{1\cdot\gamma} = \frac{\alpha\cdot\delta}{\gamma}$$

  Για παράδειγμα

$$\frac{5}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{2}{3}} = \frac{5\cdot 3}{1\cdot 2} = \frac{15}{2}$$

- $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}}{\gamma} = \dfrac{\alpha}{\dfrac{\beta}{\gamma}} = \dfrac{\alpha \cdot 1}{\beta \cdot \gamma} = \dfrac{\alpha}{\beta \cdot \gamma}$

  Για παράδειγμα

  $\dfrac{\dfrac{2}{7}}{5} = \dfrac{2}{\dfrac{7}{5}} = \dfrac{2 \cdot 1}{7 \cdot 5} = \dfrac{2}{35}$

- Αν σε ένα σύνθετο κλάσμα ένας μέσος όρος ισούται με έναν άκρο τότε απλοποιούνται και τελικά προκύπτει ένα απλό κλάσμα με όρους τους υπόλοιπους του σύνθετου κλάσματος.
- Επίσης μπορούμε να απλοποιήσου μέσο με άκρο όρο ακόμα και αν δεν είναι ίσοι αν αυτοί έχουν κοινό διαιρέτη.

  - $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}}{\dfrac{\gamma}{\beta}} = \dfrac{\alpha}{\gamma}$

    Για παράδειγμα $\dfrac{\dfrac{5}{3}}{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{5}{2}$

  - $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}}{\dfrac{\alpha}{\delta}} = \beta$

    Για παράδειγμα $\dfrac{\dfrac{4}{3}}{\dfrac{4}{7}} = \dfrac{7}{3}$

- Για να διαιρέσουμε φυσικούς αριθμούς πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

  Δηλαδή ισχύει $\alpha : \beta = \alpha \cdot \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

  Για παράδειγμα $5 : 6 = 5 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

  Μια διαίρεση συμβολίζει ένα κλάσμα και ένα κλάσμα είναι μια διαίρεση.

Σπυρίδων Τζινιέρης